3.13) a) $B = \{U_1, U_2, U_3\}$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} -\cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Para que la base sea ortonormal, debe ser ortogonal y c/u de sus elementos tener norma = 1.

Verifico que $\underbrace{(U_1, U_2) = 0}_{\mathrm{I}}$, $\underbrace{(U_2, U_3) = 0}_{\mathrm{II}}$, $\underbrace{(U_1, U_3) = 0}_{\mathrm{III}}$

I -> $(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi, 0) =$

$= -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0$ ✓

II -> $(-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi, 0) \cdot (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) =$

$= \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\varphi - \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = 0$ ✓

III -> $(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta) \cdot (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta) =$

$= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\varphi - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos\theta\operatorname{sen}\theta =$

$= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)}_{=1} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$ ✓

ES ORTOGONAL ✓

Veo las normas de: $\underbrace{\|u_1\|}_{1}$, $\underbrace{\|u_2\|}_{2}$, $\underbrace{\|u_3\|}_{3}$

1 $\rightarrow \|u_1\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\theta}$

$\rightarrow \|u_1\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta\,(\underbrace{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}_{=1}) + \cos^2\theta}$

$\rightarrow \|u_1\| = \sqrt{\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}} = 1$ ✓

2 $\rightarrow \|u_2\| = \sqrt{\underbrace{\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}} = 1$ ✓

3 $\rightarrow \|u_3\| = \sqrt{\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta.(\underbrace{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}_{=1}) + \operatorname{sen}^2\theta} =$

$= \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1}} = 1$ ✓

Por lo tanto, comprobé que B es ortogonal y sus elem. tienen norma $=1$, entonces puedo afirmar que B es una base ortonormal.

b) La matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Como quiero extenderla a $\mathbb{R}^3$ y que v_1 quede fijo, la matriz queda:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \text{con respecto a } B.$$

Para pasar de R_B^B a R_E^E que es lo que piden, uso la fórmula: $R_E^E = M_B^E \cdot R_B^B \cdot M_E^B$ $\triangle$

donde $M_B^E = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$

Como esta matriz es ortogonal, su inversa es su traspuesta:

$$M_E^B = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$\triangle$ CÁLCULO PENDIENTE...

13c) $\alpha = \pi/3$

Busco armar una base ortonormal con $<(1,1,1)>$ para simplificar cuentas y usar la base de a) que comprobé que es ortonormal.
Como $(1,1,1)$ no tiene norma $= 1$, lo normalizo para usarlo como u_1 y luego encontrar θ y φ:

$$\rightarrow u_1 = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Por lo que, ~~como~~ igualo al u_1 de a):

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \rightarrow \underline{\varphi = \pi/4} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\theta \rightarrow \underline{\theta = 54{,}7^{\circ}} \end{cases}$$

Luego, como en 6, usando los ángulos hallados, queda:

$$M_B^E = \begin{bmatrix} \text{sen}(54{,}7°)\cos(\pi/4) & \text{sen}(54{,}7)\,\text{sen}(\pi/4) & \cos(54{,}7) \\ -\text{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ -\cos(54{,}7).\cos(\pi/4) & -\cos(54{,}7)\,\text{sen}(\pi/4) & \text{sen}(54{,}7) \end{bmatrix}$$

y como las columnas son ortonormales $\rightarrow$ $(M_B^E)^{-1} = (M_B^E)^T = M_E^B$

Luego

$$R_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\text{sen}(\pi/3) \\ 0 & \text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$$

y $R_E^E = M_B^E \, R_B^B \, M_E^B$ (HACER CUENTA)